2012 m. fizikos olimpiados II turo uždavinių sprendimai

IX klasė

1. Sirakūzų valdovas Heronas paprašė filosofo Archimedo [(287 – 212) m. pr. Kr.] nustatyti kiek aukso ir sidabro yra jo karūnoje. Archimedas sutiko ir, pasvėręs karūną ore ir vandenyje, uždavinį išsprendė. Tegul Jūs turite tokią karūną, dinamometrą, indą su vandeniu. Žinote aukso tankį ρ_1, sidabro tankį ρ_2, vandens tankį ρ_0, laisvojo kritimo pagreitį g. Raskite aukso masę karūnoje.

Sprendimas

Dinamometru pasveriame karūną ore. Tegul svoris – P_1.

Po to pasveriame karūną vandenyje – svoris P_2. (1 taškas)

Tegul aukso masė - m_1, sidabro – m_2.

Pirmuoju atveju:

$$P_1 = (m_1 + m_2)g. \qquad (1) \qquad \text{(1 taškas)}$$

Antruoju atveju:

$$P_2 = (m_1 + m_2)g - \rho_0 gV, \qquad (2) \qquad \text{(2 taškai)}$$

čia $\rho_0 gV -$ karūną veikianti Archimedo jėga.

$$V = \frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} \text{ – karūnos tūris.} \qquad (3) \qquad \text{(1 taškas)}$$

(3) lygtį įrašę į (2) gauname:

$$P_2 = (m_1 + m_2)g - \rho_0 g\left(\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2}\right). \qquad (4) \qquad \text{(2 taškai)}$$

Iš (1) lygties:

$$m_2 = \frac{P_1 - m_1 g}{g}. \qquad (5) \qquad \text{(1 taškas)}$$

(5) lygtį įrašę į (4) gauname:

$$P_2 = \left(m_1 + \frac{P_1 - m_1 g}{g}\right)g - \rho_0 g\left(\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{P_1 - m_1 g}{g\rho_2}\right). \qquad \text{(1 taškas)}$$

Iš čia:

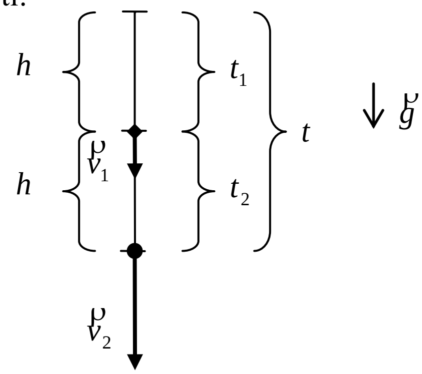
$$\boxed{m_1 = \frac{\rho_1\left(P_1\rho_0 - (P_1 - P_2)\rho_2\right)}{\rho_0(\rho_1 - \rho_2)g}} \qquad \text{(1 taškas)}$$

2. Laisvai be pradinio greičio paleistas kristi kūnas antrąją kelio pusę nukrito per laiką t_2. Kiek laiko t_1 jis sugaišo pirmojoje kelio pusėje?

Sprendimas

Tegul t – visas sugaištas kelyje laikas.

Kadangi kūnas laisvai krinta be pradinio greičio v_0=0, tai galima parašyti:



$v_1 = gt_1$, čia v_1 – kūno greitis pusiaukelėje. (1 taškas)

$v_2 = gt$, čia v_2 – kūno greitis kritimo pabaigoje. (1 taškas)

Todėl

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{t}{t_1}. \qquad (1) \qquad \text{(1 taškas)}$$

Iš energijos tvermės dėsnio:

$$mgh = \frac{mv_1^2}{2} \qquad \text{(1 taškas)}$$

ir

$$mg2h = \frac{mv_2^2}{2} \qquad \text{(1 taškas)}$$

$$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{2}. \qquad (2) \qquad \text{(1 taškas)}$$

Analogišką rezultatą galima gauti pritaikius kinematikos formules tolygiai greitėjančiam judėjimui:

$$v_1 = \sqrt{2gh} \text{ ir } v_2 = \sqrt{2g \cdot 2h}\text{. Iš čia } \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{2}.$$

Iš (1) ir (2) lygčių:

$$\frac{t}{t_1} = \sqrt{2}. \qquad (3) \qquad \text{(1 taškas)}$$

Be to $t = t_1 + t_2$. (4) (1 taškas)

(3) lygtį įrašę į (4), gauname

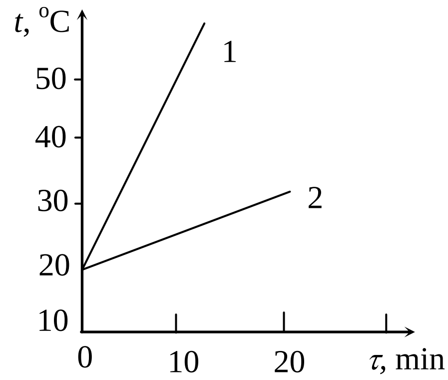
$$t_1\sqrt{2} = t_1 + t_2, \qquad \text{(1 taškas)}$$

$$t_1 = \frac{t_2}{\sqrt{2} - 1}$$

arba

$$\boxed{t_1 = t_2\left(\sqrt{2} + 1\right)} \qquad \text{(1 taškas)}$$

3. Du variniai kubai šildomi vienodais šildytuvais. Kubų temperatūros priklausomybės nuo laiko grafikai pavaizduoti paveiksle. Pirmojo kubo kraštinės ilgis a_1. Naudodamiesi grafiku, nustatykite koks antrojo kubo kraštinės ilgis a_2. Į šilumos perdavimą aplinkai nekreipti dėmesio.



Sprendimas

Per tą patį laiką, pvz., τ, kubams suteikiamas tas pats šilumos kiekis. Pirmojo kubo temperatūra pakyla Δt_1, o antrojo – Δt_2.

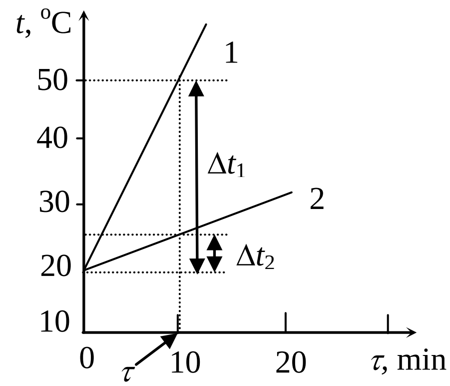
Tuomet šilumos kiekiams, suteiktiems pirmajam ir antrajam kubams, galima užrašyti:

$$Q_1 = Q_2 \qquad \text{(2 taškai)}$$

arba

$$cm_1\Delta t_1 = cm_2\Delta t_2, \qquad \text{(2 taškai)}$$

čia c – vario savitoji šiluma.



Už brėžinį (2 taškai)

Iš čia:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1}. \qquad \text{(1 taškas)}$$

Kadangi $m = \rho V = \rho\, a^3$, (1 taškas)

$$\frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1}, \qquad \text{(1 taškas)}$$

$$\boxed{a_2 = a_1\sqrt[3]{\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}} = \sqrt{6}a_1} \qquad \text{(1 taškas)}$$

Δt_1 ir Δt_2 vertes randame iš grafiko.

4. Inde yra $t = -20\,°\mathrm{C}$ temperatūros ledo. Į indą įpilama $m_1 = 0{,}4\,\mathrm{kg}$ $t_1 = 60\,°\mathrm{C}$ temperatūros vandens. Po kiek tai laiko inde nusistovi temperatūra, aukštesnė nei $0\,°\mathrm{C}$. Kiek vandens (litrais) gali pasidaryti inde? Vandens tankis $\rho = 1000\,\dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$, vandens savitoji šiluma $c = 4{,}2\cdot 10^3\,\dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot °\mathrm{C}}$, ledo savitoji šiluma $c_l = 2{,}1\cdot 10^3\,\dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot °\mathrm{C}}$, ledo savitoji lydymosi šiluma $\lambda = 3{,}3\cdot 10^5\,\dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}$. Šilumos nuostolių nepaisykite.

Sprendimas

Tegul pradinė ledo masė *m*. Nusistovėjus šiluminei pusiausvyrai inde yra tik vanduo, kurio temperatūra aukštesnė nei $0\,°\mathrm{C}$. Todėl bendras vandens tūris bus:

$$V = \frac{m + m_1}{\rho}. \qquad (1) \qquad \text{(2 taškai)}$$

Ledui išlydyti reikalingas šilumos kiekis gaunamas iš vandens, todėl

$$cm_1(t_1 - t_0) = c_\lambda m(t_0 - t) + m\lambda, \qquad \text{čia } t_0 = 0\,°\mathrm{C}. \qquad \text{(2 taškai)}$$

Iš čia:

$$m = \frac{cm_1t_1}{c_\lambda t + \lambda}. \qquad (2) \qquad \text{(1 taškas)}$$

Tokia didžiausia ledo masė gali išsilydyti inde. (1 taškas)

(2) lygtį įrašę į (1), gauname:

$$V = \frac{m_1}{\rho}\left(\frac{ct_1}{c_\lambda t + \lambda} + 1\right). \qquad \text{(2 taškai)}$$

Kadangi inde nusistovi aukštesnė nei 0 °C temperatūra, tai, kai ledo masė labai maža (m → 0), vandens bus 0,4 ℓ. (1 taškas)

Todėl vandens tūris gali kisti ribose:

$$\boxed{0{,}4\ \ell < V < 0{,}67\ \ell} \qquad \text{(1 taškas)}$$